1 Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Die Lösung linearer Gleichungssysteme gehört zu den Grundaufgaben der praktischen Mathematik. Eine der wichtigsten Lösungsmethoden ist das Gaußsche Eliminationsverfahren, ein sogenanntes direktes Verfahren, das nach endlich vielen arithmetischen Operationen die numerische Lösung der Aufgabe liefert. Die aus der linearen Algebra bekannte Cramersche Regel eignet sich im allgemeinen nicht zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme, da sie für die Berechnung der n Unbekannten die Berechnung von $n + 1$ Determinanten und damit einen zu großen Rechenaufwand erfordert.

Im Abschnitt n wird das Eliminationsverfahren auf spezielle Klassen linearer Gleichungssysteme angewandt, deren Koeffizientenmatrizen positiv definit, diagonaldominant oder M-Matrizen sind.

Gauß, Carl Friedrich. * Braunschweig 30. April 1777, † Göttingen 23. Februar 1855, dt. Mathematiker, Astronom und Physiker. — Der seit 1807 als Prof. für Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen wirkende G., bereits zu Lebzeiten als Princeps mathematicorum bezeichnet, gehört zu den bedeutendsten Mathematikern. 1801 veröffentlichte er seine *Disquisitiones arithmeticae*, das grundlegende Werk der modernen Zahlentheorie. Im gleichen Jahr erzielte G. einen besonderen wissenschaftlichen Erfolg, als W. Olbers die Wiederauffindung des Planetoiden Ceres an einer von ihm vorausberechneten Stelle gelang. G. veröffentlichte seine hierzu entwickelten Methoden der Bahnbestimmung 1809 in seinem Hauptwerk *Theoria motus corporum coelestium*, in dem er der theoretischen Astronomie eine neue Grundlage gab. 1827 veröffentlichte er sein grundlegendes differentialgeometrisches Werk *Disquisitiones circa superficies curvas*. Zusammen mit dem Physiker Wilhelm Weber widmete er sich der Erforschung des Erdmagnetismus, wobei er das nach ihm benannte absolute physikalische Maßsystem aufstellte. Der von beiden 1833 konstruierte elektromagnetische Telegraph wurde damals technisch nicht weiterentwickelt. In diese Zeit fallen auch seine grundlegenden Arbeiten zur Physik, insbesondere zur Mechanik, zur Potentialtheorie sowie zur geometrischen Optik. Auf dem Gebiet der Mathematik sind vor allem noch seine Arbeiten zur Theorie der unendlichen Reihen, seine Methoden der numerischen Mathematik sowie seine Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra zu nennen. (*Meyers Taschenlexikon*.)

Determinante. Es gibt genau eine Abbildung $\det : M(n \times n, K) \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. det ist linear in jeder Zeile
2. Ist $\operatorname{rg} A < n$, so ist $\det A = 0$
3. $\det E = 1$.

det heißt „die Determinante“, $\det A$ „die Determinante von A“. (Jänich, *Lineare Algebra.*)

Cramersche Regel. Ist $\det A \neq 0$ und $Ax = b$, so gilt

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}, i = 1, \ldots, n.$$

(Die b im Zähler stehen dabei in der i-ten Spalte.)

positiv definit (Diese Definition gebe ich hier nicht, weil allmählich genug Material zum Testen in dieser Datei steht.)

diagonaldominant (Diese Definition gebe ich hier nicht, weil allmählich genug Material zum Testen in dieser Datei steht.)

M**-Matrix** (Diese Definition gebe ich hier nicht, weil allmählich genug Material zum Testen in dieser Datei steht.)

Ceres. Ein Kleinplanet, der von Olbers nach Berechnungen von Gauß wiederentdeckt wurde. (Diese etwas dümmliche Erläuterung dient dazu, einen neuen Verweis auf Gauß unterzubringen.)